Développement : Point de FERMAT d'un triangle

ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE
ANALYSE & PROBABILITÉS

Références :
- [BMP] BECK V., MALICK J., PEYRÉ G. *Objectif Agrégation, 2ème édition*, H&K, 2005, p30.
- [ROU] ROUVIÈRE F., *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, 4ème édition*, Cassini, 2003, p386.
- Pour la dernière proposition : elle est plus ou moins faire dans [ROU] mais pas avec exactement les mêmes arguments. Je n'ai pas trouvé de référence précise pour celle-là, désolé...

Pour les leçons :
- 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.
- 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
- 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
- 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Soit O l'origine du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, qu'on note $\|\cdot\|$.
Si M est un point du plan $\mathbb{R}^2$, on notera m son affixe.

Lemme 1.

Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.
Alors, la fonction $f : M \longmapsto MA + MB + MC$ est coercive, strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et différentiable sur $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{A, B, C\}$, et son gradient s'écrit :

$$\forall M \in U \quad \nabla f(M) = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} + \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}.$$

PREUVE : Raisonnons par étapes.
⋆ ÉTAPE 1 : Montrons que f est coercive.
Si $M \in \mathbb{R}^2$, par inégalité triangulaire, on a :

$$OM - OA \leqslant MA.$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} f(M) & \geqslant & (OM - OA) + (OM - OB) + (OM - OC) \\ & \geqslant & 3OM - (OA + OB + OC) \\ & \geqslant & 3OM - f(O) \\ & \underset{\|M\| \to +\infty}{\longrightarrow} & +\infty, \end{array}$$

ce qui prouve que f est coercive.
⋆ ÉTAPE 2 : Montrons que f est strictement convexe. Soient $M, N \in \mathbb{R}^2$ et $t \in]0;1[$. Il s'agit de montrer que :

$$f(tM + (1-t)N) < f(M) + (1-t)f(N).$$

Par inégalité triangulaire :

$$\begin{array}{rcl} f(tM + (1-t)N) & = & |a - tm - (1-t)n| + |b - tm - (1-t)n| + |c - tm - (1-t)n| \\ & = & |t(a-m) - (1-t)(n-a)| + |t(b-m) - (1-t)(n-b)| + |t(c-m) - (1-t)(n-c)| \\ & \leqslant & t|a-m| + (1-t)|n-a| + t|b-m| + (1-t)|n-b| + t|b-m| + (1-t)|n-b| \\ & \leqslant & tf(M) + (1-t)f(N), \end{array}$$

avec égalité si, et seulement si chaque couple de vecteurs $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$, $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BN})$, $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN})$ est constitué de vecteurs positivement liés. Mais alors, dans ce cas, si $M \neq N$, A, B, C serait alignés sur la droite (MN), ce qui est proscrit par hypothèse.
Il n'y a donc pas égalité, et f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
⋆ ÉTAPE 3 : f est différentiable sur U par somme de fonctions différentiables. De plus, si $M, N \in U$, on a :

$$\begin{array}{rcl} AN^2 & = & \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AN} \\ & = & (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN})^2 \\ & = & AM^2 + 2\langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{MN} \rangle + MN^2 \\ & = & AM^2 \left(1 - 2 \left\langle \dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM^2}, \overrightarrow{NM} \right\rangle + \underset{M \to N}{o}(NM) \right). \end{array}$$

Comme $\sqrt{\ } : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient, en composant et par développement limité de $\sqrt{\ }$:

$$AN = AM\left(1 - \left\langle \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^2}, \overrightarrow{NM} \right\rangle + o(NM)\right) = AM - \left\langle \frac{\overrightarrow{AM}}{AM}, \overrightarrow{NM} \right\rangle + o(NM).$$

On a un résultat similaire en remplaçant A et B puis par C. Il vient :

$$f(M+N) \quad = \quad f(M) - \left\langle \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} + \frac{\overrightarrow{CM}}{CM} | \overrightarrow{NM} \right\rangle + o(NM),$$

ce qui achève la preuve. □

Théorème 2.

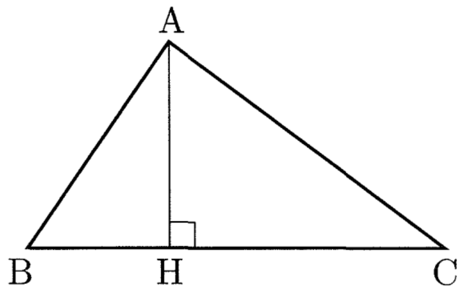
Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On suppose que les trois angles du triangle ABC sont strictement inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.
Alors, la fonction f admet un minimum global strict sur $\mathbb{R}^2$ en un point $P \notin \{A, B, C\}$, et :

$$\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = \frac{2\pi}{3}.$$

PREUVE : Déjà, d'après le lemme précédent, f est coercive et strictement convexe. Elle admet donc un minimum atteint en un unique point du plan.
De plus, comme f est différentiable sur $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{A, B, C\}$ et strictement convexe, son minimum est atteint soit en un point critique, soit en A, B, C. Plus précisément, si f a un point critique, c'est en ce point que f atteint son minimum ; sinon, c'est en A, B ou C.
⋆ ÉTAPE 1 : Montrons que ce minimum n'est pas atteint en A, B ou C. Soient $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles du triangle en respectivement A, B et C.
Leur somme (en radians) vaut π, donc au moins deux d'entre eux est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$, par exemple $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

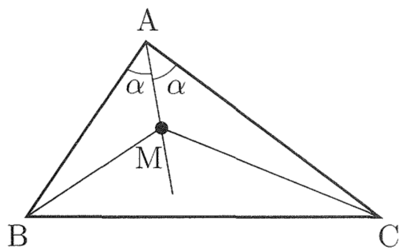
Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC), ce qui fait de (AH) la hauteur du triangle ABC issue de A. Comme $\hat{B}, \hat{C} < \frac{\pi}{2}$, on a $H \in]BC[$.
Donc :

$$\begin{aligned} f(H) &= HA + HB + HC \\ &= HA + BC \\ &< BA + BC, \end{aligned}$$



puique $AH < BA$ (BA étant l'hypoténuse du triangle AHB rectangle en H). Donc $f(H) < f(B)$. B ne peut donc pas être le point en lequel f atteint son minimum. Cela signifie que $P \neq B$, et de même, $C \neq P$.

Maintenant, si $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$, un raisonnement analogue conduit encore à $P \neq A$. Sinon, $A \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$.



On considère un point M au voisinage de A, sur la bissectrice de $\hat{A} := 2\alpha$. On a :

$$MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \times AM \times \cos(\alpha).$$

Donc :

$$MB = AB\sqrt{1 + \frac{AM^2}{AB^2} - 2\frac{AM}{AB}\cos(\alpha)} = AB - AM\cos(\alpha) + \underset{M \to A}{o}(AM).$$

De même, $MC = AC - AM\cos(\alpha) + \underset{M \to A}{o}(AM)$.

Donc $f(M) = f(A) + (1 - 2\cos(\alpha))AM + \underset{M \to A}{o}(AM)$.
Par hypothèse, $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$. Donc $1 - 2\cos(\alpha) < 0$, et alors pour M au voisinage de A sur la bissectrice mentionnée :

$$f(M) < f(A).$$

Cela prouve que $A \neq P$. Le point en lequel f réalise son minimum est donc forcément un point critique de f sur U.

⋆ ÉTAPE 2 : Étudions les points critiques de f.
Soit $P \in U$ tel que $\frac{\overrightarrow{AP}}{AP} + \frac{\overrightarrow{BP}}{BP} + \frac{\overrightarrow{CP}}{CP} = 0$.
Cherchons trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ **unitaires** tels que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$. Alors, $-\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, et donc :

$$1 = \vec{w} \cdot \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v})^2 = 1 + 2\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \vec{v}^2 = 2(1 + \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle).$$

Par conséquent,

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = -\frac{1}{2} = \cos(\beta),$$

où β est l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qu'on prend positif. On en déduit que $\beta = \frac{2\pi}{3}$.

On fait de même pour les autres produits scalaires, et l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{w}$, ainsi que par $\vec{v}$ et $\vec{w}$, est égal à $\frac{2\pi}{3}$.

Le point P défini par $\frac{\overrightarrow{AP}}{AP} = \vec{u}$, $\frac{\overrightarrow{BP}}{BP} = \vec{v}$ et $\frac{\overrightarrow{CP}}{CP} = \vec{w}$ est donc l'unique point critique de f.
On en déduit que le maximum de f est atteint en cet unique point P, ainsi que l'égalité des angles souhaitée. □

Proposition 3.

Sous les mêmes hypothèses, le point P est à l'intérieur du triangle ABC (au sens large). On l'appelle *Point de* FERMAT *du triangle ABC*.

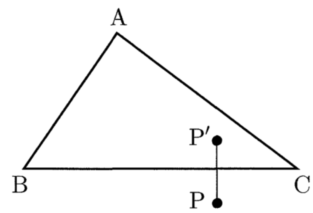
<u>PREUVE :</u> Supposons P strictement à l'extérieur du triangle, par exemple si P et A sont de part et d'autre de la droite (BC) (comme indiqué sur le schéma ci-contre).

Alors, en considérant le symétrique P' de P par rapport à (BC), on aurait :

$$P'A < PA, \quad P'B = PB, \quad P'C = PC.$$

Donc :

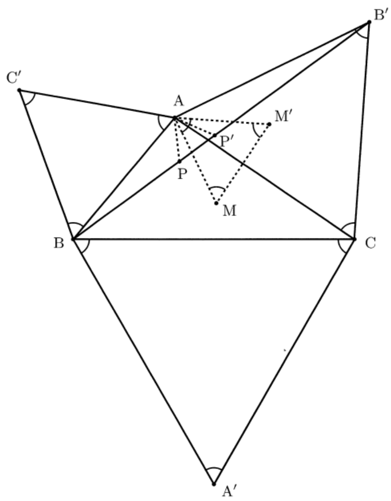
$$f(P') < f(P).$$



Cela est absurde par définition de P. □

Remarque 4. *Construction géométrique de P.*

On peut construire P géométriquement, comme le montre le schéma ci-dessous :



Mais je ne me suis pas intéressé à pourquoi c'est vrai exactement.
On peut de plus montrer que si un des angles du triangle est supérieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$, par exemple $\hat{A}$, alors $P = A$.

Remarque 5.

Un (gros) conseil pour pas que le développement ne soit indigeste à l'oral : faites un schéma et complétez-le au fur et à mesure. N'écrivez pas toute la preuve non plus, dites quelques arguments à l'oral en complétant le schéma, à moins que vous soyiez sûrs d'avoir le temps et la place de tout écrire.